

Тема: Вычисление характеристик ДСВ.

Цель работы: **Дидактическая:** отработать навыки нахождения характеристик для небольших наборов дискретных случайных величин; рассмотреть свойства математического ожидания, дисперсии.

Развивающая: формировать современное мировоззрение и умение ориентироваться в изменчивом информационном мире. **Воспитательная:** учить мыслить категориями, имеющими вероятностный характер, общаться на деловой основе, применять вводимые понятия в практической жизни, видеть их роль в разных областях деятельности человека.

Необходимый теоретический материал:

Случайная величина - это величина, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Будем обозначать случайные величины буквами латинского алфавита **X, Y, Z**.

Дискретная случайная величина принимает конечное (или счетное) число возможных значений- x_i (где $i = 1.. n$ или $i = 1 .. \infty$) с определенными вероятностями.

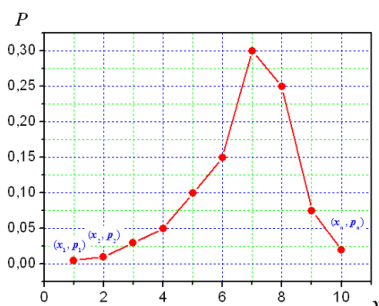
Соответствие между всеми возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями называется **законом распределения** данной случайной величины.

Простейшая формой задания закона распределения дискретной случайной величины является таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины (обычно в порядке возрастания) и соответствующие им вероятности:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Такая таблица называется **рядом распределения**. Допустим, что число возможных значений случайной величины конечно: x_1, x_2, \dots, x_n . При одном испытании случайная величина принимает одно и только одно постоянное значение. Поэтому события $X = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) образуют полную группу попарно независимых событий. Следовательно, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Можно закон распределения изобразить и графически, откладывая на оси абсцисс возможные значения случайной величины, а на оси ординат – соответствующие вероятности. Для большей выразительности полученные точки соединяются прямолинейными отрезками. Получающаяся при этом фигура называется **многоугольником (полигоном) распределения**.



Функцией распределения случайной величины X называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x , вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше x : $F(x) = P(X < x)$.

Иногда функцию $F(x)$ называют интегральной функцией распределения.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. Значение функции распределения принадлежит отрезку $[0,1]$: $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. Функции распределения есть неубывающая функция.

3. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (a, b) , равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

4. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b) , то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \leq a; \quad F(x) = 1 \text{ при } x \geq b.$$

5. Справедливы следующие предельные отношения:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическое ожидание M дискретной случайной величины - это среднее значение случайной величины, равное сумме произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.

$$M(x) = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной $M(C) = C$.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания $M(Cx) = CM(x)$.
3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий $M(xy) = M(x)M(y)$.
4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

Для описания многих практически важных свойств случайной величины необходимо знание не только ее математического ожидания, но и отклонения возможных ее значений от среднего значения.

Дисперсия случайной величины — мера разброса случайной величины, равная математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(x) = M[x - M(x)]^2$$

Принимая во внимание свойства математического ожидания, легко показать что

$$D(x) = M(x^2) - (M(x))^2$$

Казалось бы естественным рассматривать не квадрат отклонения случайной величины от ее математического ожидания, а просто отклонение. Однако математическое ожидание этого отклонения равно нулю. Это объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, другие отрицательны, и в результате их взаимного погашения получается ноль. Можно было бы принять за меру рассеяния математическое ожидание модуля отклонения случайной величины от ее математического ожидания, но как правило, действия связанные с абсолютными величинами, приводят к громоздким вычислениям.

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной равна нулю.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат.
3. Если x и y независимые случайные величины, то дисперсия суммы этих величин равна сумме их дисперсий.

Средним квадратическим отклонением случайной величины (иногда применяется термин «*стандартное отклонение случайной величины*») называется число равное

$$\sigma = \sqrt{D(x)}$$

Среднее квадратическое отклонение, следовательно, является, как и дисперсия, мерой рассеяния распределения, но измеряется, в отличие от дисперсии, в тех же единицах, которые используют для измерения значений случайной величины.

Задания:

Вариант-1

№1. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле 0,5, для второго 0,4. Дискретная случайная величина X - число попаданий в мишень. Найдите закон распределения X , построить многоугольник распределения, найти интегральную функцию, построить ее график, найти математическое отклонение, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

№2. Требуется найти: а) β б) математическое ожидание; в) дисперсию; г) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по заданному закону её распределения, заданному таблично (в первой строке таблицы указаны возможные значения, во второй строке – вероятности возможных значений).

x_i	11	15	20	25	30
p_i	0,4	β	0,3	0,1	0,1

№3. Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию случайной величины $Z=3X+2Y$, если $D(X)=5$, $D(Y)=3$.

№4. Найти математическое ожидание случайной величины Z , если известны мат. ожидания X и Y . $Z=X+2Y$
 $M(X)=5$, $M(Y)=3$.

№5. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1=4$ с вероятностью $P_1=0,5$; $x_2=6$ с вероятностью $P_2=0,3$ и x_3 с вероятностью p_3 . Найти x_3 и p_3 , зная, что $M(X)=8$.

Вариант-2

№1. Кафе обслуживают три автоматические установки. Каждая из них в течение дня может выйти из строя с вероятностью $p=0,3$. Пусть x – число установок, вышедших из строя до конца дня. Составить ряд распределения случайной величины X . Найти закон распределения X , $M(x)$, $D(x)$, построить многоугольник распределения, найти интегральную функцию, построить ее график, найти среднее квадратическое отклонение.

№2. Случайная величина X имеет ряд распределения

X	50	0	50	100
P	α	0,2	0,3	0,1

Найти α , $M(x)$, $\sigma(x)$.

№3. Найти $M(Z)$ и $D(Z)$ для случайной величины Z , если $Z = 3X + 4Y$ и $M(X)=2$, $D(X)=3$, $M(Y)=6$, $D(Y)=5$.

№5. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1=2$ с вероятностью $P_1=0,3$; $x_3=1$ с вероятностью $P_3=0,4$ и x_2 с вероятностью p_2 . Найти x_2 и p_2 , зная, что $M(X)=6$.

Контрольные вопросы.

- определение математического ожидания;
- математическое ожидание является обобщением чего?
- свойства математического ожидания;
- определение дисперсии;
- формулы вычисления дисперсию;
- свойства дисперсии;
- определение среднего квадратического отклонения.
- примеры ДСВ.

Форма отчета: устный зачет.